

【54】 次の問いに答えよ.

(1)  $n$  を自然数,  $\theta$  を実数とする.

$\sin\{(n+1)\theta\} + \sin\{(n-1)\theta\}$  を  $\sin(n\theta), \cos\theta$  を用いて表せ.

(2) 関数  $f(x) = x - \sqrt{x^2}$  は  $x = 0$  で微分可能でないことを示せ.

(3) 定積分  $\int_1^e x^3 \log x dx$  を求める.

【55】 次の問いに答えよ.

(1)  $x \geq 0$  のとき,  $x - x^2 \leq \log(1+x) \leq x$  が成り立つことを示せ.

(2) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \log\left(1 + \frac{k}{n^3}\right)$

【56】 自然数  $n$  に対して,

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

とおく. また,

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-2)\cdots\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ n(n-2)(n-2)\cdots\cdots 6 \cdot 4 \cdot 2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1)  $1000!$  を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ.

(2)  $1000!!$  を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ.

(3)  $999!!$  を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ.

【56】  $n$  を自然数とし,  $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$  とする.

(1)  $x > 0$  のとき  $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$  を示せ.

(2)  $n \geq 2$  のとき  $2(\sqrt{n+1} - 1) < S_n < 2\sqrt{n} - 1$  を示せ.

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$  を求めよ.