

【50】0でない複素数 z に対して、 $i(z-1)$, $z + \frac{1}{z} - 3i$, $-i$ が表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。点 z が単位円周 ($|z|=1$) 上を動くとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 複素数平面上に点 A が描く図形と点 B が描く図形を図示せよ。
- (2) $z = \cos \theta + i \sin \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とおく。 S を、3点 A, B, C が一直線上にないときは三角形 ABC の面積とし、3点 A, B, C が一直線上にあるときは0とする。
 S を θ の式で表せ。
- (3) (2)における S を最大にする z の値と、そのときの S の値を求めよ。

【51】 n を自然数とする。 x, y 全ての実数を動くとき、定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt$$

の最小値を I_n とおく。このとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

【52】 k を正の定数とする。2次方程式 $z^2 - 2kz + 1 = 0$ が虚数解をもつとし、虚部が正の虚数解を α とする。次の問いに答えよ。

- (1) k の値の範囲を求めよ。また、 $|\alpha|$ を求めよ。
- (2) $\cos \frac{5}{12}\pi$ の値を求めよ。
- (3) 複素数平面において、 α^3 が第3象限にあり、かつ α^6 が第1象限にあるときの α の偏角 $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と k の値の範囲を求めよ。ただし、座標軸の点は、どの象限にも属さない。
- (4) (3)において求めた範囲に α があるとき、 $|1 - \alpha^5|$ の値の範囲を求めよ。

【53】 平面上の原点 O を中心とする半径1の円周上に点 A, B がある。

正の数 t に対し、等式 $|\vec{OA} + t\vec{OB}| = 3|t\vec{OA} - \vec{OB}| \cdots (*)$ が成り立つとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を t を用いて表せ。
- (2) 等式 $(*)$ を満たす点 A, B が存在するような t の値の範囲を求めよ。
- (3) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ の最小値を求めよ。