【 31 】複素数 $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ に対して, 複素数 β,γ を

$\beta=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$, $\gamma=\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6$ とする. このとき次の問いに答えよ.

(1) $\beta+\gamma,\beta\gamma$ の値を求めよ.

(2) β,γ の値を求めよ.

(3) $\sin\dfrac{2\pi}{7}+\sin\dfrac{4\pi}{7}+\sin\dfrac{8\pi}{7}$ および $\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{4\pi}{7}\sin\dfrac{8\pi}{7}$ の値を求めよ.

【 32 】$f(x)=\dfrac{x}{1-x}-\log(x+1)$ とする.

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求め, グラフの概形を書きなさい. ただし, 凹凸は調べなくてもよい.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}}f(x)dx$ の値を求めよ.

【 33 】数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする.

$S_n=2a_n-n^2(n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つとき, 次の問いに答えよ.

(1) a_1 の値を求めよ.

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ.

(3) $b_n=a_n+2n+3$ とおくとき, b_{n+1} を b_n で表せ.

(4) 一般項 a_n を求めよ.

【 34 】数列 $\{a_n\}$ について, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,3,\cdots),S_0=0$ とおく.

$$a_n=S_{n-1}+n2^n(n=1,2,3,\cdots)$$

が成り立つとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) S_n を n の式で表しなさい.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{a_k}$

【 35 】点 O を原点とする xy 平面上に点 $A(1,0)$ と y 軸上を動く点 $P(0,p(t))$ がある.

$\angle$ OAP $=\theta(t)$ とするとき, 以下の問いに答えなさい. ただし, $t>0,p(t)>0$ とする.

(1) $p(t)$ を $\theta(t)$ を用いて表しなさい.

(2) $\dfrac{d\theta(t)}{dt}$ を, $\dfrac{dp(t)}{dt}$ と $\theta(t)$ を用いて表しなさい.

(3) 点 P が $p(1)=1,\dfrac{dp(t)}{dt}=1$ を満たすように動くとき,

$\displaystyle\int_1^{\infty}\Big(\frac{d\theta(t)}{dt}\Big)^2dt$ を求めなさい.