

【28】以下の問いに答えよ.

(1) 次の不等式を証明せよ.

ただし, 必要であれば,  $2^{10} = 1024, 2^{13} = 8192$  を用いてよい.

$$\frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{4}{13}$$

(2) (1) を用いて,  $2^{100}$  は何桁の数か答えよ.

(3)  $\log_{10} 2$  が無理数であることを証明せよ.

【29】次の極限值を求めなさい.

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{2x}}$

【30】次の問いに答えよ.

(1) 次の不等式を解きなさい.

$$(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 3 \leq 0$$

(2)  $x$  が (1) で求めた範囲にあるとき,

$$f(x) = \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{3}\right) \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{4}\right)$$

の最大値と最小値, 及びそのときの  $x$  の値を求めよ.

【30】 $n$  を自然数とする.  $x, y$  全ての実数を動くとき, 定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt$$

の最小値を  $I_n$  とおく. このとき, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  を求めよ.

【31】複素数  $\alpha = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$  に対して, 複素数  $\beta, \gamma$  を

$\beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4, \gamma = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$  とする. このとき次の問いに答えよ.

(1)  $\beta + \gamma, \beta\gamma$  の値を求めよ.

(2)  $\beta, \gamma$  の値を求めよ.

(3)  $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}$  および  $\sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} \sin \frac{8\pi}{7}$  の値を求めよ.

【32】 $f(x) = \frac{x}{1-x} - \log(x+1)$  とする.

(1) 関数  $f(x)$  の極値を求め, グラフの概形を書きなさい. ただし, 凹凸は調べなくてもよい.

(2) 定積分  $\int_0^{\frac{1}{3}} f(x) dx$  の値を求めよ.