

【20】 a, b を実数として、 $P = a^4 - 4a^2b + b^2 + 6b$ とおく。

- (1) すべての実数 b に対して、 $P \geq 0$ となるような a の範囲を求めよ。
- (2) すべての実数 a に対して、 $P \geq 0$ となるような b の範囲を求めよ。

【21】以下の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 a, b, c に対して以下の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

- (2) 正の実数 x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) に対してつぎの不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

【22】 $P = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ とおく。

- (1) 任意の実数 a, b, c に対して、 $P \geq 0$ となることを示せ。
- (2) $0 \leq a \leq 1, 1 \leq b \leq 2, 2 \leq c \leq 3$ のとき P の最小値を求めよ。
また、そのときの a, b, c の値を求めよ。

【23】曲線 $y = e^x$ の接線で、原点を通るものを l とする。

- (1) 接線 l の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 $y = e^x$, 接線 l および直線 $y = x + 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

【24】等式 $f(x) = x^2 - x \int_0^2 |f(x)| dx$ を満たす関数 $f(x)$ を全て求めよ。

【25】 $y = x^2$ と $y = x$ とで囲まれる領域を $y = x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

【26】直線 $y = ax$ が放物線 $y = x^2 - 2x + 2$ に異なる 2 点 P, Q で交わるとき、点 P, Q と点 $R(1, 0)$ の作る三角形の重心を G とする。 a を動かしたときの点 G の軌跡を求めよ。

【27】数列 $\{a_n\}$ は $0 < a_1 < 3, a_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) をみたすものとする。

このとき、次の (1)~(3) を示しなさい。

- (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $0 < a_n < 3$ が成り立つ。
- (2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $3 - a_{n+1} \leq \frac{1}{3}(3 - a_n)$ が成り立つ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$