

【8】 $k = \frac{y}{x}$ (x, y は実数, $x \neq 0$) とし, $z = \frac{-x^2 + xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ とする.

- (1) z を k を用いて表しなさい.
- (2) z の最小値を求めよ.

【9】 a を実数とする. 関数 $f(x), g(x)$ を $f(x) = x^2 + ax + 3$, $g(x) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$ ($x \neq 0$)

とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $x \neq 0$ のとき, $x + \frac{1}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) $t = x + \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) とするとき, $g(x)$ を a, t を用いて表せ.
- (3) $g(x)$ ($x \neq 0$) の最小値が負となるような a の値の範囲を求めよ.

【10】 一般項が $a_n = \frac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について以下の問いに答えよ.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ.
- (3) 2 以上の整数 k に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ.

【11】 a を正の実数とする. 実数 x に対し,

$$f(x) = \frac{1}{a+x}(x \neq -a), g(x) = \frac{1}{a-x}(x \neq a)$$

と定める.

- (1) $f(x) = g(x)$ を満たす実数 x の個数を求めよ.
- (2) $f(x) \leq g(x)$ を満たす実数 x の値の範囲 ($x \neq a, -a$) を求めよ.
- (3) 全ての正の実数 x に対して

$$f(x+1) < \log(x+4) - \log(x+3) < f(x)$$

が成立するような自然数 a の値を求めよ.

【12】 三角形 ABC の内部に点 P があり, $4\vec{PA} + 5\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{0}$ を満たしている.

- (1) \vec{AP} を \vec{AB} と \vec{AC} を用いて表せ
- (2) 面積比 $\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA$ を求めよ.

【13】 $x = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$, $y = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$ のとき, 以下の値を求めよ.

- (1) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$
- (2) $x^6 + y^6$