方程式・不等式

第1問　☆☆☆

a, b は実数とする．2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が $0<x<1, 1<x<2$ の範囲に 1 つずつ解をもつ．このとき, 2 次方程式 $x^2+bx+a=0$ は異なる 2 つの実数解を持つことを示しなさい.
また, そのうち大きい方の解のとり得る値の範囲を求めよ.

第2問　☆☆

a は実数の定数とする. 2 つの整式
$f(x)=x^4+(a+2)x^3+x^2-(4a+1)x+9$
$g(x)=x^3+ax^2-2ax+3$
について, 次の問に答えよ.
(1) $f(x)$ を $g(x)$ で割った商と余りを求めよ.
(2) $f(x)$ と $g(x)$ が 1 次以上の整式を共通の因数にもつような a の値を求めよ.

第3問　☆☆☆☆

2 以上の整式 k に対して, $f_k(x)=x^k-kx+k-1$ とおく.
(1) $f_k(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れることを示せ.
(2) n は 2 以上の整数とする. n 次多項式 $g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるためには, $g(x)$ が定数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ を用いて

$$g(x)=\sum_{k=2}^{n} a_k f_k(x)$$

の形に表されることが必要十分であることを示せ.

第4問　☆☆☆

正の実数 a, b, c が $a+5b+7c=12$ を満たすとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 実数 p, q, r, x, y, z に対して,

$$(px+qy+rz)^2+(py-qx)^2+(qz-ry)^2+(rx-pz)^2$$

を因数分解せよ.

(2) 実数 p, q, r, x, y, z に対して, 不等式

$$(p^2+q^2+r^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (px+qy+rz)^2$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのはどのようなときか.

(3) $\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{7c}$ の最大値を求めよ.

第5問　☆☆

$\gamma=1+\sqrt{3}i$ とする. ただし, i は虚数単位である. 実数 a, b に対して多項式 $P(x)$ を

$$P(x)=x^4+ax^3+bx^2-8(\sqrt{3}+1)x+16$$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $P(\gamma)=0$ となるように a と b を定めよ.

(2) (1) で定めた a と b に対して, $P(x)=0$ となる複素数 x で γ 以外のものを全て求めよ.

第6問　☆☆☆

θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の角とする.

(1) $\sin 3\theta=\sin 2\theta$ を満たす θ を求めよ.

(2) m, n を 0 以上の整数とする. θ についての方程式 $\sin 3\theta=m\sin 2\theta+n\sin\theta$ が解をもつときの (m, n) と, そのときの解 θ を求めよ.

第7問　☆☆☆☆

n を正の整数とする.
(1) $x > y > 0$ とするとき, 次の不等式を証明せよ.
$x^{n+1} - y^{n+1} > (n+1)(x-y)y^n$
(2) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ と $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}$ の大小を比較せよ.

第8問　☆☆☆☆

p, q を正の実数とする. x の方程式
$\log_{10}(px) \cdot \log_{10}(qx) + 1 = 0$
が 1 より大きい解を持つとき, 点 $(\log_{10} p, \log_{10} q)$ の存在する範囲を座標平面上に図示せよ.

第9問　☆☆☆

$p = \dfrac{2^{148}+1}{17}$ は整数である.p は何桁の整数か答えよ.
ただし, $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ である.

第10問　☆☆☆

$a = \sin^2 \dfrac{\pi}{5}, b = \sin^2 \dfrac{2\pi}{5}$ とおく.
このとき, 以下のことが成り立つことを示しなさい.
(1) $a+b$ および ab は有意数である.
(2) 任意の自然数 n に対し $(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$ は整数である.