

第 1 問

k を正の実数とし、2 次方程式 $x^2 + x - k = 0$ の 2 つの実数解を α, β とする。 k が $k > 2$ の範囲を動くとき、

$$\frac{\alpha^3}{1-\beta} + \frac{\beta^3}{1-\alpha}$$

の最小値を求めよ。

第 2 問

座標平面上の放物線 $y = 3x^2 - 4x$ を C とおき、直線 $y = 2x$ を l とおく。実数 t に対し、 C 上の点 $P(t, 3t^2 - 4t)$ と l の距離を $f(t)$ とする。

(1) $-1 \leq a \leq 2$ の範囲の実数 a に対し、定積分

$$g(a) = \int_{-1}^a f(t) dt$$

を求めよ。

(2) a が $0 \leq a \leq 2$ の範囲を動くとき、 $g(a) - f(a)$ の最大値および最小値を求めよ。

第 3 問

黒玉 3 個, 赤玉 4 個, 白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し, 取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし, 袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

- (1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。
- (2) どの赤玉も隣り合わないとき, どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

第 4 問

半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A, B, C, D が

$$AB = 1, \quad AC = BC, \quad AD = BD, \quad \cos \angle ACB = \cos \angle ADB = \frac{4}{5}$$

を満たしているとする。

- (1) 三角形 ABC の面積を求めよ。
- (2) 四面体 ABCD の体積を求めよ。