[I]　n を自然数として，整式 $(3x+2)^n$ を x^2+x+1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。以下の問に答えよ。

(1) a_{n+1} と b_{n+1} を，それぞれ a_n と b_n を用いて表せ。

(2) 全ての n に対して，a_n と b_n は 7 で割り切れないことを示せ。

(3) a_n と b_n を a_{n+1} と b_{n+1} で表し，全ての n に対して，2 つの整数 a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

[II]　赤玉と黒玉が入っている袋の中から無作為に玉を 1 つ取り出し，取り出した玉を袋に戻した上で，取り出した玉と同じ色の玉をもう 1 つ袋に入れる操作を繰り返す。以下の問に答えよ。

(1) 初めに袋の中に赤玉が 1 個，黒玉が 1 個入っているとする。n 回の操作を行ったとき，赤玉をちょうど k 回取り出す確率を $P_n(k)$ $(k=0, 1, \cdots, n)$ とする。$P_1(k)$ と $P_2(k)$ を求め，さらに $P_n(k)$ を求めよ。

(2) 初めに袋の中に赤玉が r 個，黒玉が b 個 $(r \geqq 1,\ b \geqq 1)$ 入っているとする。n 回の操作を行ったとき，k 回目に赤玉が，それ以外ではすべて黒玉が取り出される確率を $Q_n(k)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ とする。$Q_n(k)$ は k によらないことを示せ。

[III]　実数 x に対して関数 $f(x)$ を $f(x)=e^{x-2}$ で定め，正の実数 x に対して関数 $g(x)$ を $g(x)=\log x+2$ で定める。また $y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフをそれぞれ C_1, C_2 とする。以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ と $g(x)$ がそれぞれ互いの逆関数であることを示せ。

(2) 直線 $y=x$ と C_1 が 2 点で交わることを示せ。ただし，必要なら $2<e<3$ を証明しないで用いてよい。

(3) 直線 $y=x$ と C_1 との 2 つの交点の x 座標を α, β とする。ただし $\alpha<\beta$ とする。直線 $y=x$ と C_1, C_2 をすべて同じ xy 平面上に図示せよ。

(4) C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を (3) の α と β の多項式で表せ。

［Ⅳ］　複素数平面上に2点 A(1), B($\sqrt{3}i$) がある。ただし，i は虚数単位である。複素数 z に対し $w=\dfrac{3}{z}$ で表される点 w を考える。以下の問に答えよ。

(1)　$z=1,\ \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \sqrt{3}i$ のときの w をそれぞれ計算せよ。

(2)　実数 t に対し $z=(1-t)+t\sqrt{3}i$ とする。$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}$ について，αz の実部を求め，さらに $(w-\alpha)\overline{(w-\alpha)}$ を求めよ。

(3)　w と原点を結んでできる線分 L を考える。z が線分 AB 上を動くとき，線分 L が通過する範囲を図示し，その面積を求めよ。

［Ⅴ］　xyz 空間において，3点 A(2, 1, 2), B(0, 3, 0), C(0, −3, 0) を頂点とする三角形 ABC を考える。以下の問に答えよ。

(1)　∠BAC を求めよ。

(2)　$0 \leqq h \leqq 2$ に対し，線分 AB, AC と平面 $x=h$ との交点をそれぞれ P, Q とする。点 P, Q の座標を求めよ。

(3)　$0 \leqq h \leqq 2$ に対し，点 $(h, 0, 0)$ と線分 PQ の距離を h で表せ。ただし，点と線分の距離とは，点と線分上の点の距離の最小値である。

(4)　三角形 ABC を x 軸のまわりに1回転させ，そのときに三角形が通過する点全体からなる立体の体積を求めよ。

［以　下　余　白］