注　意　問題**1**, **2**, **3**, **4**, **5** の解答を，**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ナ）については，分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの（数，式など）を**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。

1

（1）　$f(x)=x^4$ とする。$f(x)$ の $x=a$ における微分係数を，定義に従って求めなさい。計算過程も記述しなさい。

（2）　$g(x)=|x|\sqrt{x^2+1}$ とする。$g(x)$ が $x=0$ で微分可能でないことを証明しなさい。

（3）　閉区間 $[0,\ 1]$ 上で定義された連続関数 $h(x)$ が，開区間 $(0,\ 1)$ で微分可能であり，この区間で常に $h'(x)<0$ であるとする。このとき，$h(x)$ が区間 $[0,\ 1]$ で減少することを，平均値の定理を用いて証明しなさい。

2

kを正の実数とし，空間内に点O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(4k,\ -4k,\ -4\sqrt{2}k)$，B$(7,\ 5,\ -\sqrt{2})$をとる。点CはO，A，Bを含む平面上の点であり，OA＝4BCで，四角形OACBはOAを底辺とする台形であるとする。

（1） $\cos\angle \mathrm{AOB} =$ $\boxed{\text{（ア）}}$ である。台形OACBの面積をkを用いて表すと $\boxed{\text{（イ）}}$ となる。また，線分ACの長さをkを用いて表すと $\boxed{\text{（ウ）}}$ となる。

（2） 台形OACBが円に内接するとき，$k =$ $\boxed{\text{（エ）}}$ である。

（3） $k =$ $\boxed{\text{（エ）}}$ であるとし，直線OBと直線ACの交点をDとする。△OBPと△ACPの面積が等しい，という条件を満たす空間内の点P全体は，点Dを通る2つの平面上の点全体から点Dを除いたものとなる。これら2つの平面のうち，線分OAと交わらないものをαとする。点Oから平面αに下ろした垂線の長さは $\boxed{\text{（オ）}}$ である。

3

何も入っていない2つの袋A，Bがある。いま，「硬貨を1枚投げて表が出たら袋A，裏が出たら袋Bを選び，以下のルールに従って選んだ袋の中に玉を入れる」という操作を繰り返す。

ルール

- 選んだ袋の中に入っている玉の数がもう一方の袋の中に入っている玉の数より多いか，2つの袋の中に入っている玉の数が同じとき，選んだ袋の中に玉を1個入れる。
- 選んだ袋の中に入っている玉の数がもう一方の袋の中に入っている玉の数より少ないとき，選んだ袋の中に入っている玉の数が，もう一方の袋の中に入っている玉の数と同じになるまで選んだ袋の中に玉を入れる。

たとえば，上の操作を3回行ったとき，硬貨が順に表，表，裏と出たとすると，A，B 2つの袋の中の玉の数は次のように変化する。

A：0個　　　A：1個　　　A：2個　　　A：2個
B：0個 ⟶ B：0個 ⟶ B：0個 ⟶ B：2個

（1）　4回目の操作を終えたとき，袋Aの中に3個以上の玉が入っている確率は $\boxed{\text{（カ）}}$ である。また，4回目の操作を終えた時点で袋Aの中に3個以上の玉が入っているという条件の下で，7回目の操作を終えたとき袋Bの中に入っている玉の数が3個以下である条件付き確率は $\boxed{\text{（キ）}}$ である。

（2）　n 回目の操作を終えたとき，袋Aの中に入っている玉の数のほうが，袋Bの中に入っている玉の数より多い確率を p_n とする。p_{n+1} を p_n を用いて表すと $p_{n+1} = \boxed{\text{（ク）}}$ となり，これより p_n を n を用いて表すと $p_n = \boxed{\text{（ケ）}}$ となる。

（3）　n 回目 $(n \geqq 4)$ の操作を終えたとき，袋Aの中に $n-1$ 個以上の玉が入っている確率は $\boxed{\text{（コ）}}$ であり，$n-2$ 個以上の玉が入っている確率は $\boxed{\text{（サ）}}$ である。

4

（1） $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において常に不等式 $|b| \leqq |b+1-b\cos x|$ が成り立つような実数 b の値の範囲は $\boxed{\quad（シ）\quad} \leqq b \leqq \boxed{\quad（ス）\quad}$ である。

以下，b を $\boxed{（シ）} \leqq b \leqq \boxed{（ス）}$ を満たす 0 でない実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(\cos x)^{n-1}}{(b+1-b\cos x)^n}\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義する。

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b^n a_n = 0$ が成り立つことを証明しなさい。

（3） $a_1 = \boxed{\quad（セ）\quad}$ である。

（4） a_{n+1} を a_n，n，b を用いて表すと，$a_{n+1} = \boxed{\quad（ソ）\quad}$ となる。

（5） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}\right\} = \boxed{\quad（タ）\quad}$ である。

5

（1）　α を ± 1 ではない複素数とする。複素数平面上で $\left|\dfrac{\alpha z+1}{z+\alpha}\right|=2$ を満たす点 z 全体からなる図形を C とする。C は α が $\boxed{\text{（チ）}}$ を満たすとき直線となり，$\boxed{\text{（チ）}}$ を満たさないとき円となる。α が $\boxed{\text{（チ）}}$ を満たさないとき，円 C の中心を α を用いて表すと $\boxed{\text{（ツ）}}$ となる。α が $\boxed{\text{（チ）}}$ を満たすとき，直線 C 上の点 z のうち，その絶対値が最小となるものを α を用いて表すと $\boxed{\text{（テ）}}$ となる。

（2）　$f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ とする。自然数 a, b, c の組で，$a \leqq b \leqq c$ かつ $f(a)+f(b)+f(c)$ が自然数であるものの総数は，$\boxed{\text{（ト）}}$ 個である。その中で $f(a)+f(b)+f(c)$ の値が最大になるのは $(a,\ b,\ c)=\boxed{\text{（ナ）}}$ のときである。