〔 1 〕　（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{15}}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

以下の問いに答えよ。

(1) 4 次方程式 $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解け。

(2) 複素数平面上の △ABC の頂点を表す複素数をそれぞれ α，β，γ とする。

$$(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$$

が成り立つとき，△ABC はどのような三角形になるか答えよ。

〔 2 〕　（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{16}}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定められるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha \leqq 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(2) $\alpha > 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(3) $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(4) $\dfrac{3}{2} \leqq \alpha < 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

〔 3 〕　(配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{17}}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

点 O を原点とする座標平面上の $\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\overrightarrow{m}=(a,c),\ \ \overrightarrow{n}=(b,d)$$

に対して，$D=ad-bc$ とおく。座標平面上のベクトル $\overrightarrow{q}$ に対して，次の条件を考える。

条件 I　　$r\overrightarrow{m}+s\overrightarrow{n}=\overrightarrow{q}$ を満たす実数 r，s が存在する。

条件 II　$r\overrightarrow{m}+s\overrightarrow{n}=\overrightarrow{q}$ を満たす整数 r，s が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 I がすべての $\overrightarrow{q}$ に対して成り立つとする。$D\neq 0$ であることを示せ。

以下，$D\neq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル $\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ で

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}=1,\ \ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=0$$

を満たすものを求めよ。

(3) さらに a，b，c，d が整数であるとし，x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル $\overrightarrow{q}$ に対して条件 II が成り立つとする。D のとりうる値をすべて求めよ。

〔 4 〕　（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{18}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが，逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$，$g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A)　すべての x, y について $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$

(B)　すべての x, y について $g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

(C)　$f(0)\fallingdotseq 0$

(D)　$f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$，$g'(0)=1$

$\underset{①}{\underline{\text{条件 (A), (B), (C) から } f(0)=1,\ g(0)=0 \text{ がわかる}}}$。以上のことから $\underset{②}{\underline{f(x),\ g(x) \text{ はすべての } x \text{ の値で微分可能で，} f'(x)=-g(x),\ g'(x)=f(x) \text{ が成立する}}}$ ことが示される。$\underset{③}{\underline{\text{上のことから } \{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=1 \text{ であることが，実部と虚部を調べることによりわかる}}}$。ただし i は虚数単位である。よって条件 (A), (B), (C), (D) を満たす関数は三角関数 $f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin x$ であることが示される。

さらに，a，b を実数で $b\fallingdotseq 0$ とする。このとき条件 (D) をより一般的な

(D)$'$　$f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=a$，$g'(0)=b$

におきかえて，条件 (A), (B), (C), (D)$'$ を満たす $f(x)$，$g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも，条件 (A), (B), (C) から $f(0)=1$, $g(0)=0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x)=e^{-\frac{a}{b}x}f\left(\frac{x}{b}\right),\quad q(x)=e^{-\frac{a}{b}x}g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと，$\underset{④}{\underline{\text{条件 (A), (B), (C), (D) において，} f(x) \text{ を } p(x) \text{ に，} g(x) \text{ を } q(x) \text{ におきかえた条件が満たされる}}}$。すると前半の議論により，$p(x)$，$q(x)$ がまず求まり，このことを用いると $f(x)=\boxed{\text{ア}}$，$g(x)=\boxed{\text{イ}}$ が得られる。

(1) 下線部 ① について，$f(0)=1$，$g(0)=0$ となることを示せ。

(2) 下線部 ② について，$f(x)$ がすべての x の値で微分可能な関数であり，$f'(x)=-g(x)$ となることを示せ。

(3) 下線部 ③ について，下線部 ①，下線部 ② の事実を用いることにより，$\{f(x)+ig(x)\}(\cos x - i\sin x)=1$ となることを示せ。

(4) 下線部 ④ について，条件 (B), (D) において，$f(x)$ を $p(x)$ に，$g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。つまり $p(x)$ と $q(x)$ が，

(B)　すべての x，y について $q(x+y)=p(x)q(y)+q(x)p(y)$

(D)　$p(x)$，$q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0)=0$，$q'(0)=1$

を満たすことを示せ。また空欄 $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に入る関数を求めよ。

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{19}}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

xy 平面上の曲線 C を，媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = t + 2\sin^2 t, \quad y = t + \sin t \quad (0 < t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。

(2) 曲線 C のうち $y \leqq x$ の領域にある部分と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。